

УДК 330.146:519.86

Рожок Т.О.

*магістрант кафедри економіко-математичного моделювання  
Київського національного економічного університету  
імені Вадима Гетьмана*

## МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ФУНКЦІОНУВАННЯ ФІРМИ В УМОВАХ РИНКОВОЇ ЕКОНОМІКИ

### MODELING OF THE DYNAMICS OF BUSINESS FUNCTIONING IN THE MARKET ECONOMY

#### АНОТАЦІЯ

Розглядається нелінійна динамічна економіко-математична модель, що описує функціонування фірми в системі координат «чисельність персоналу – обсяг власного капіталу – обсяг позикового капіталу». Викладено в тезах результати кількісного аналізу моделі при різних значеннях параметрів. Представлено процес моделювання динаміки функціонування реальної фірми на основі досліджуваної моделі.

**Ключові слова:** фірма, економіко-математичне моделювання, економічна динаміка, нелінійні моделі, диференціальні рівняння.

#### АННОТАЦИЯ

Рассматривается нелинейная динамическая экономико-математическая модель, описывающая функционирование фирмы в системе координат «численность персонала – объем собственного капитала – объем заемного капитала». Изложено в тезисах результаты количественного анализа модели при разных значениях параметров. Представлено процесс моделирования динамики функционирования реальной фирмы на основе рассматриваемой модели.

**Ключевые слова:** фирма, экономико-математическое моделирование, экономическая динамика, нелинейные модели, дифференциальные уравнения.

#### ANNOTATION

A nonlinear dynamic economic mathematical model, which describes the functioning of a business in the coordinate system «staff number – amount of equity – amount of debt capital» is reviewed. Results of a quantitative analysis model for different values of parameters are stated in the thesis. The process of modeling of the actual business functioning dynamics on the basis of the reviewed model is presented.

**Keywords:** business, economic mathematical modeling, economic dynamics, nonlinear models, differential equations.

**Постановка проблеми.** Динаміка ключових показників діяльності фірми як принципової інституційної одиниці суспільства є важливим об'єктом дослідження. На її основі можна як формувати висновки стосовно успішності розвитку у минулому, так і робити припущення щодо стану фірми у майбутньому. Розгляд динаміки економічних показників у взаємозв'язку із найбільш суттєвими факторами економічної діяльності дає підґрунтя для встановлення причинно-наслідкових зв'язків між умовами господарювання та економічним результатом. В цілому динаміка основних показників керованого економічного об'єкту є суттєвим предметом аналізу при прийнятті управлінських рішень, тому її моделювання є нагальною проблемою економіки, систематичне та об'єктивне вирішення якої не можливе без застосування потужного математичного апарату.

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Моделюванню різних аспектів діяльності фірми присвячено ряд вітчизняних і зарубіжних праць. У статті В.М. Полтеровича та ін. [1] представлена динамічна модель розподілу фірм конкретної галузі за технологічною ефективністю. У статті С.В. Зайцева та ін. [2] проаналізовано динамічну модель діяльності малого інноваційного підприємства, що описує динаміку грошових оборотних засобів та готової продукції на складі. А.М. Ахтямов у своїй монографії [3] розглянув ряд динамічних моделей на основі лінійних диференціальних рівнянь, зокрема: модель вибуття фондів, модель зростання виробництва з врахуванням інвестицій, модель коливання ринкових цін та ін. Праця М.А. Зенкевича [4] присвячена моделюванню технологічного розвитку сумісного підприємства, зокрема на основі динамічної детермінованої моделі. О.О. Іващенко та ін. у праці [5] представили динамічну модель розвитку кількох технологій, що послідовно змінюються. У праці М.А. Гусейнової та ін. [6] аналізується три специфікації узагальненої динамічної моделі прибутковості компанії залежно від її іміджу. У монографії Ю.В. Коляди [7] на основних положеннях синергетики і кінетики описано динамічну модель функціонування фірми у координатах «кількість працівників – величина власного капіталу – обсяг кредитів», від якої і відштовхується автор статті у своєму дослідженні.

**Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми.** На основі проведеного аналізу останніх публікацій можна стверджувати, що існує значний інтерес наукових кіл до відтворення економічних процесів мікрорівня за допомогою динамічних моделей, але, незважаючи на цей факт, відчувається дефіцит якісних ґрунтовних моделей, що відображали б життєдіяльність фірми у широкому охопленні предметної області. Зокрема бракує нелінійних динамічних моделей відображення фінансового стану фірми в цілому, хоча моделювання обсягів власного і позикового капіталу як базису формування пасивів підприємства є актуальною проблемою фінансового менеджменту. Саме тому автор обрав модель [7, с. 183] для проведення подальших досліджень.

Окрім того, в сучасній практиці дослідження економічних процесів за допомогою динамічних

моделей існує не дуже формалізована процедура відтворення реальних процесів на основі статистичних або числових історичних даних. Особливо гостро ця проблема постає для динамічних моделей із безрозмірними величинами. Тому справедливо стверджувати, що питання способів налаштування конкретних динамічних моделей для відтворення економічних процесів на підґрунті реальних даних, а також економічної інтерпретації результатів моделювання при оперуванні безрозмірними величинами залишаються відкритими в сучасному науковому просторі.

#### Постановка завдання.

Перша частина завдання полягає у проведенні всеосяжного дослідження моделі функціонування фірми [7, с. 183] та викладенні у стислій формі його результатів. Друга частина завдання полягає у моделюванні функціонування реальної фірми на основі досліджуваної моделі, що передбачає процедуру обробки вихідних статистичних даних, налаштування моделі з метою відтворення цільової динаміки змінних та формування остаточної комп'ютерної моделі функціонування фірми.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Використовуючи модель [7, с. 183], шляхом зміни позначень параметрів і змінних (для кращого візуального сприйняття), а також експериментальної модифікації коефіцієнта перед нелінійним доданком першого рівняння (з метою встановлення кращого взаємозв'язку між параметрами та змінними) було отримано економіко-математичну модель еволюції фірми, що представлена наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{z} = -\tilde{n}_1 \times z + \tilde{n}_2 \times y + (c_2 \times c_3) / c_4 \times x \times y \\ \dot{y} = c_3 \times y - c_4 \times z + x - c_5 \times z \times x \\ \dot{x} = -c_5 \times x + c_6 \times y \end{cases}, \quad (1)$$

де  $z$  – чисельність персоналу;  $y$  – обсяг власного капіталу;  $x$  – обсяг позикового капіталу;  $\dot{z}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{x}$  – похідні відповідних змінних по незалежній змінній часу  $t$ ;  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  – параметри моделі, що характеризують різні умови господарювання фірми.

Якісні та кількісні характеристики розвитку системи (1) в часі залежать від значень параметрів, а також початкових значень змінних. При числовому розв'язанні динамічної моделі отримуються інтегральні криві та фазові портрети, які відображають динаміку системи в різних

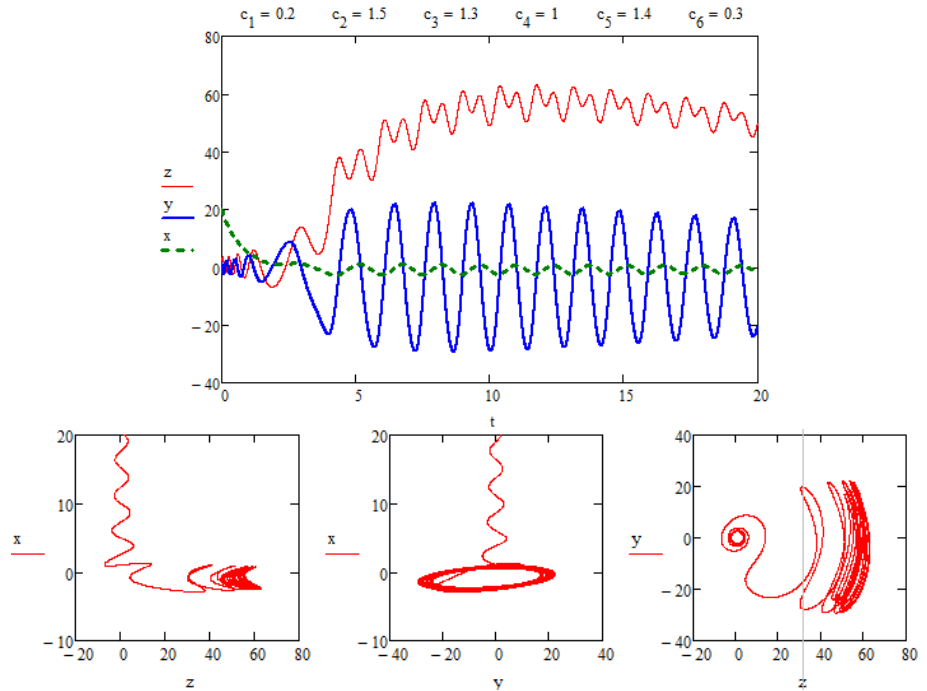


Рис. 1. Інтегральні криві (зверху) та фазові портрети (знизу) системи (1) для значень параметрів  $c_1 = 0,2$ ,  $c_2 = 1,5$ ,  $c_3 = 1,3$ ,  $c_4 = 1,0$ ,  $c_5 = 1,4$ ,  $c_6 = 0,3$  на проміжку інтегрування  $t \in [0; 20]$

поданнях. На початку процесу дослідження моделі використовувалися такі значення параметрів:  $c_1 = 0,2$ ,  $c_2 = 1,5$ ,  $c_3 = 1,3$ ,  $c_4 = 1,0$ ,  $c_5 = 1,4$ ,  $c_6 = 0,3$  при початковій умові  $x_0 = 20,0$ ,  $y_0 = 2,0$ ,  $z_0 = 2,0$ . На рисунку 1 наведено інтегральні криві та фазові портрети для вказаної комбінації параметрів. Для числового інтегрування системи (1) та візуалізації результатів використовувався програмний засіб Mathcad версії 14.0.

На графіках рисунка 1 чітко простежується проходження системою трьох стадій розвитку, які умовно можна назвати так: 1) активне споживання кредиту; 2) трансформація бізнес-процесів; 3) економічна зрілість. Цей поділ важливий, оскільки, по-перше, відображає властивість системи знаходитися у декількох різних станах, а, по-друге, яскраво свідчить про здатність моделі відтворювати послідовний процес розвитку фірми. Нижче подано короткий опис кожної з наведених стадій.

*Стадія активного споживання кредиту* характеризується активним розвитком фірми, розгортанням бізнес-процесів, збільшенням обсягів виробництва, утворенням нових зв'язків із поставальниками, партнерами та дистриб'юторами, тобто становленням фірми як нового суб'єкта економічної діяльності в ринковому середовищі. Нині більша частина витрат здійснюється за рахунок наявних кредитних ресурсів.

*Стадія трансформації бізнес-процесів* настає, коли наявного обсягу кредитних ресурсів стає недостатньо для компенсації всіх витрат. На цій стадії фірма проводить реструктуриза-

цію своєї діяльності. На рисунку 1 показано, що зростання ключових показників фірми в період трансформації тимчасово уповільнюється. Формуючи потенціал для подальшого розвитку, фірма активно розширює штат працівників і остаточно споживає вільні кошти (як позикові, так і власні). Коли стадія трансформації завершується, подальше зростання ключових показників залежить від потенціалу, який фірма встигла закласти.

Стадія економічної зрілості є цільовою і останньою, до якого прямує система; їй властива усталена циклічна динаміка, характеристики якої тісно пов'язані з умовами господарювання фірми. У моделі (1) циклічна динаміка у стадію економічної зрілості може бути трьох типів:

1) *нестійкий* (зі зростаючою амплітудою коливань – див. рис. 2: ключові показники діяльності фірми зростають з кожним наступним циклом, що свідчить про позитивний перебіг еволюції фірми);

2) *граничний* (з постійною амплітудою – див. рис. 1: ключові показники коливаються в межах певного «коридору» значень, що свідчить про застій в розвитку фірми);

3) *стійкий* (зі спадною амплітудою – див. рис. 3; інтервал, в межах якого коливаються змінні, звужується з кожним наступним циклом, що свідчить про поступове згорання діяльності фірми та її витіснення з галузі).

Динаміка змінних моделі (1) виявляє ряд особливостей, які варто розглянути:

1) змінні  $x$  та  $y$  підлягають циклічним коливанням навколо рівня, дуже близького до нуля, що свідчить про відсутність трендової компоненти в цих змінних;

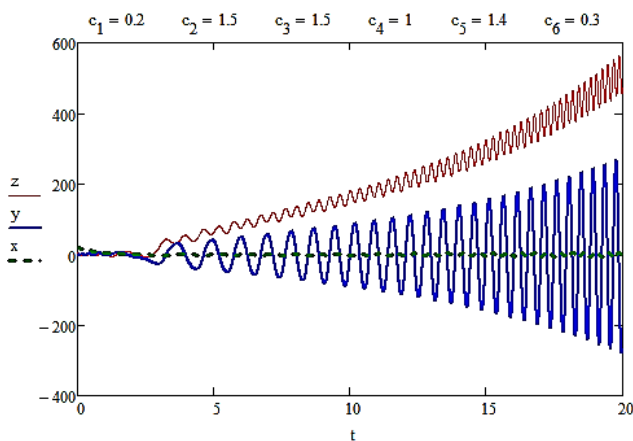


Рис. 2. Інтегральні криві за нестійкого типу циклічних коливань системи (1) при  $c_3 = 1,5$  на проміжку інтегрування  $t \in [0; 20]$

2) амплітуда циклічних коливань змінних  $x$  та  $y$  зростає під час економічного розвитку модельованої фірми та знижується під час економічного спаду; це означає, що про реальний досягнутий рівень показника, що моделюється змінною  $x$  або  $y$ , можна говорити опосередковано: через амплітуду циклічних коливань;

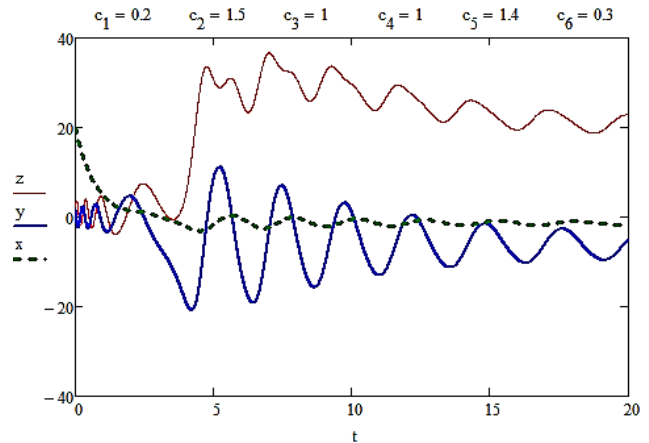


Рис. 3. Інтегральні криві за стійкого типу циклічних коливань системи (1) при  $c_3 = 0,9$  на проміжку інтегрування  $t \in [0; 20]$

3) змінна  $z$ , як правило, проходить два цикли коливань за час, рівний тривалості одного циклу коливань змінних  $x$  та  $y$ ;

4) циклічні коливання змінної  $x$  зсунуті на четверть тривалості циклу відносно коливань змінної  $y$  (спостерігається часовий лаг).

Шляхом проведення кількісного аналізу динамічної моделі, що полягає у виявленні її властивостей шляхом багатократного числового розв'язання при різних значеннях параметрів, було встановлено вплив параметрів  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  на формування динаміки числових розв'язків та надано економічну інтерпретацію кожному параметру. Відповідні результати дослідження коротко описані нижче.

*Параметр  $c_1$*  виражає плинність трудових кадрів. З економічного погляду плинність кадрів є, безумовно, негативним фактором розвитку підприємства, оскільки перешкоджає покращенню якості персоналу через малу віддачу від його навчання, регулярну втрату цінних кадрів та постійне порушення усталених професійних зв'язків між окремими працівниками. Параметр  $c_1$  є одним із найвпливовіших: від його значення залежить тип циклічних коливань після настання економічної зрілості фірми (нестійкий, граничний, стійкий).

*Параметр  $c_2$*  виражає трудомісткість технології виробництва. При появі нерозподіленої частки прибутку керівництво фірми прагне збільшити обсяги виробництва, що потребує відповідного збільшення обсягів змінних факторів виробництва, зокрема робочої сили.

*Параметр  $c_3$*  виражає оборотність капіталу, тобто величину прибутку на одиницю капіталу за визначений часовий проміжок. Цей параметр є одним із найвпливовіших, оскільки від нього значно залежить тип циклічної динаміки системи (1), що, зокрема, було проілюстровано на рисунках 2 і 3.

*Параметр  $c_4$*  – це вартість робочої сили як економічного фактора на певному підприємстві, враховуючи середній рівень заробітної плати, податкові ставки на соціальне забезпе-

чення, додаткові виплати працівникам (премії, надбавки, на відрадженьня тощо).

Параметр  $c_5$  – це вартість кредиту (рівень процентної ставки). Результати кількісного аналізу свідчать, що високий рівень процентної ставки негативно впливає як на розвиток фірми з високою часткою позикового капіталу (більше половини пасивів), так і на розвиток економічно незалежної фірми. Це можна пояснити тим, що цей показник визначає сприятливість умов господарювання в цілому. Параметр  $c_5$  є одним із найвпливовіших параметрів, що значно впливає на тип динаміки у системі.

Параметр  $c_6$  виражає спроможність та готовність фірми до залучення позик. Іншими словами, цей параметр охоплює кредитний рейтинг та позикову стратегію певного підприємства. Зокрема, більша довіра з боку банківських установ означає можливість залучення більшого обсягу кредитних ресурсів, але це ще не означає, що підприємство скористається (принаймні повністю) цією можливістю.

Моделювання життєдіяльності конкретної фірми на основі моделі (1) передбачає вибір значень параметрів і початкової умови таким чином, щоб динаміка змодельованих змінних максимально наближалася до динаміки реальних даних за обраний історичний період. Варто нагадати, що досліджувана модель має чимало важливих властивостей, зокрема: безрозмірність величин; відсутність трендової компоненти в динаміці змінних  $x$  та  $y$ ; опосередковане вираження досягнутого рівня показників обсягу позикового та власного капіталу через амплітуду коливань згідно зі змінними  $x$  та  $y$ .

Зазначені властивості обумовлюють потребу застосовувати спеціальний алгоритм обробки реальних вихідних даних перед безпосереднім налаштуванням моделі (1). На думку автора, такий алгоритм повинен забезпечувати, з одного боку, набуття обробленими даними вищевказаних властивостей і, з іншого – збереження в них істотної інформації про розвиток ключових показників фірми. Логіка подібної обробки полягає у зведенні реальних даних про фірму до такого виду, в якому їх можна порівнювати із модельованими даними. Нижче подано лаконічний опис операцій, передбачених запропонованим алгоритмом обробки вихідних даних:

1) з часових рядів обсягу власного капіталу та обсягу позикового капіталу вилучається трендова складова (у цьому дослідженні для вираження тренду була використана модель лінійної однофакторної регресії);

2) кожний рівень кожного з трьох часових рядів (обсягів власного і позикового капіталу та чисельності персоналу) помножується на масштабний коефіцієнт, обчислений за задалегідь визначеною формулою (призначення масштабного коефіцієнта – виразити досягнутий рівень показника через амплітуду циклічних коливань);

3) отримані часові ряди зводяться до одного масштабу шляхом ділення кожного рівня

на варіаційний розмах відповідного до часового ряду.

Беручи до уваги зазначені міркування, нижче представлено процес моделювання життєдіяльності фірми за допомогою моделі (1) на прикладі зарубіжної фірми «OraSure Technologies, Inc.». Значення ключових в контексті моделі (1) показників діяльності цієї фірми за 1996-2014 рр. показано у таблиці 1. Зазначені ряди даних можна інтерпретувати як часові ряди, оскільки вони впорядковані за зростанням значень часу.

Таблиця 1  
Показники діяльності фірми «OraSure Technologies, Inc.» за 1996-2014 рр. [8]

Період, рік	Власний капітал, тис. дол. США	Позиковий капітал, тис. дол. США	Кількість працівників, осіб
1996	31 676	8 566	113
1997	17 873	8 105	130
1998	10 701	10 082	85
1999	18 592	11 659	83
2000	26 172	11 564	210
2001	26 541	10 744	221
2002	26 019	9 718	187
2003	73 509	12 642	171
2004	75 577	12 487	194
2005	118 919	11 828	233
2006	129 504	27 061	233
2007	140 055	27 298	282
2008	108 325	23 593	287
2009	103 807	23 184	280
2010	102 843	19 677	231
2011	100 250	27 612	308
2012	170 315	21 124	313
2013	161 146	23 099	293
2014	158 701	30 932	320

За описаним вище алгоритмом обробки вихідних даних на основі інформації з таблиці 1 сформовано три безрозмірні часові ряди (рис. 4).

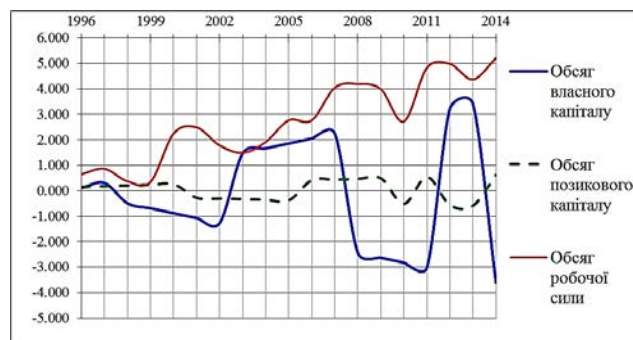


Рис. 4. Динаміка безрозмірних показників власного капіталу, позикового капіталу та чисельності персоналу за 1996-2014 рр.

Як початкову умову для моделі (1) в контексті моделювання життєдіяльності фірми «OraSure Technologies, Inc.» вибрано початкове значення безрозмірних часових рядів: обсяг власного капіталу  $y_0 = 0,108$ ; обсяг позиково-

го капіталу  $x_0 = 0,151$ ; чисельність персоналу  $z_0 = 0,649$ .

У процесі налаштування параметрів моделі (1) з метою максимального зближення динаміки безрозмірних показників (рис. 4) і динаміки модельованих змінних було використано результати кількісного аналізу, серед яких отримані знання про вплив параметрів моделі на динаміку останньої. Виходячи з позицій забезпечення бажаних змін у динаміці змінних моделі, почергово підбиралися значення її параметрів. Внаслідок проведеного налаштування моделі були отримані такі значення параметрів:  $c_1 = 0,15$ ,  $c_2 = 0,40$ ,  $c_3 = 0,75$ ,  $c_4 = 0,65$ ,  $c_5 = 0,80$ ,  $c_6 = 0,40$ .

Результатом попередніх досліджень є остаточно комп'ютерна модель, яка описує динаміку ключових показників життєдіяльності фірми «OraSure Technologies, Inc.» за 1996-2014 рр. Математичний вираз комп'ютерної моделі наведено нижче:

$$\begin{cases} \dot{z} = -0,15 \cdot z + 0,40 \times y + 0,462 \times x \times y \\ \dot{y} = 0,75 \times y - 0,65 \times z + x - 0,75 \times z \times x, \\ \dot{x} = -0,8 \times x + 0,4 \times y \end{cases} \quad (2)$$

Графік інтегральних кривих, що відображає динаміку змінних моделі (2) в часі, та фазові портрети, що відображають співвідношення між змінними моделі (2) незалежно від часу, зображено на рисунку 5. Спостерігається значна схожість у динаміці змодельованих показників, з одного боку, та у динаміці безрозмірних показників, отриманих на базі вихідних статистичних даних, – з іншого. Незважаючи на певні розбіжності у вихідній та змодельованій динаміці, отримана комп'ютерна модель (2) має значну перевагу: вона описує досліджува-

ний економічний процес у поняттях нелінійної динаміки, тому придатна для отримання нових знань про якісні характеристики досліджуваного об'єкта.

Динаміка змінних на рисунку 5 характеризується постійно зростаючою амплітудою коливань обсягу власного капіталу та зростаючою трендовою компонентою чисельності персоналу. З економічного погляду це означає, що фірма успішно розвивається, поступово збільшуючи обсяг власного капіталу в структурі пасивів (як в абсолютному, так у відносному вираженні), а також розширюючи персонал.

**Висновки.** У праці розглянуто нелінійну модель економічної динаміки (1), що описує розвиток фірми у координатах «чисельність персоналу – обсяг власного капіталу – обсяг позикового капіталу» за допомогою системи диференціальних рівнянь. В результаті проведеного дослідження динамічної моделі сформуовано змістовні уявлення про властивості і характеристики досліджуваної моделі. Під час кількісного аналізу моделі кожному її параметру надано економічну інтерпретацію.

Важливою частиною статті є представлення процесу відтворення життєдіяльності реальної фірми на основі моделі (1), результатом якого стала комп'ютерна модель, що описує динаміку ключових показників діяльності розглянутої фірми. Також автор спробував подолати труднощі застосування нелінійних динамічних економіко-математичних моделей, які обумовлені потребою взаємодії дослідника з модельованими безрозмірними показниками, з одного боку, та реальними статистичними даними – з іншого.

Можна виокремити перспективні напрямки подальших досліджень щодо моделювання динаміки функціонування фірми. По-перше, доцільним напрямком наукової діяльності є подальша модифікація моделі (1), спрямована на отримання більш інтуїтивно зрозумілої динаміки змінних, що підлягає легшій економічній інтерпретації. По-друге, відкритим залишається питання вибору і розробки конкретної методології обробки реальних числових даних з метою співставлення з ними модельованих даних. І, третє, найбільш гострою є проблема ефективного й обґрунтованого налаштування моделі, тобто підбору конкретних значень параметрів і початкової умови з метою відтворення динаміки реальних економічних процесів.

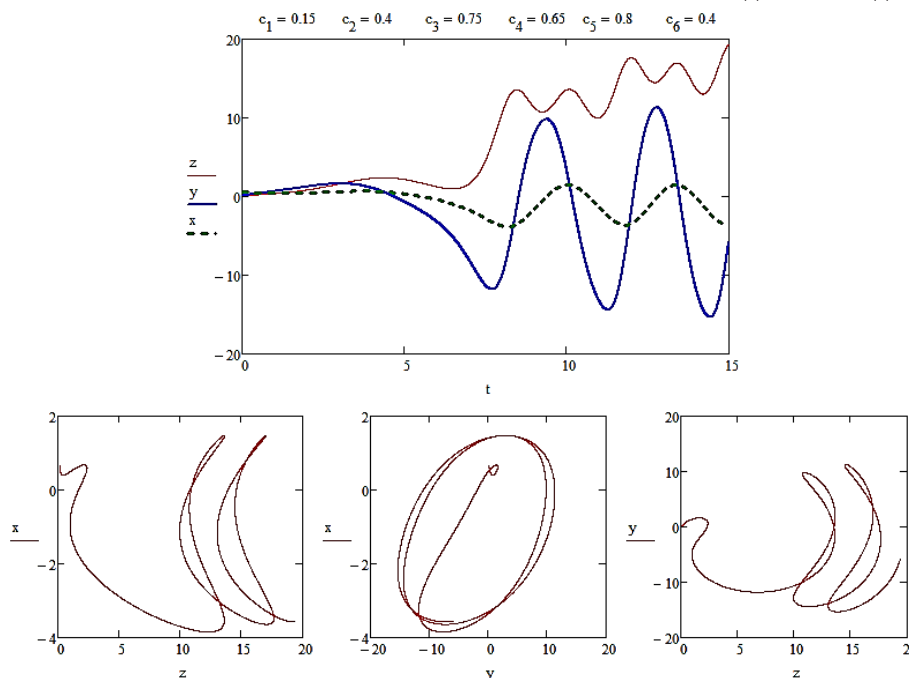


Рис. 5. Інтегральні криві (зверху) та фазові портрети (знизу) системи (2) на проміжку інтегрування  $t \in [0; 15]$

**БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:**

1. Моделирование динамики распределения предприятий отрасли по уровням эффективности (на примере черной металлургии) / В.М. Полтерович, Л.М. Гельман, М.И. Левин, В.А. Спивак // Экономика и математические методы. – 1993. – Т. 29, вып. 3. – С. 460–469.
2. Математическая модель деятельности малого инновационного предприятия. Явление «скрытого» банкротства / С.В. Зайцев, С.А. Соловьев, Д.С. Чернавский, А.В. Щербаков. – М. : ИПМ, 2001. – 30 с.
3. Ахтямов А.М. Математические модели экономических процессов : моногр. / А.М. Ахтямов ; ред.-изд. центр Баш. гос. ун. – Уфа : РИЦ БашГУ, 2009. – 140 с.
4. Зенкевич Н.А. Моделирование устойчивого совместного предприятия / Н.А. Зенкевич // Научные доклады. – СПб. : ВШМ СПбГУ, 2009. – № 1(Р).
5. Иващенко А.А. Механизмы финансирования инновационного развития фирмы / А.А. Иващенко, Д.В. Колобов, Д.А. Новиков. – М. : ИПУ РАН, 2005. – 66 с.
6. Гусейнова М.А. Математическое моделирование финансового состояния компаний с учетом инвестиций в рекламу, на примере НПК / М.А. Гусейнова, А.В. Коваленко, М.Х. Уртенцов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. – Краснодар : КубГАУ, 2010. – № 10(64).
7. Коляда Ю.В. Адаптивна парадигма моделювання економічної динаміки : моногр. / Ю.В. Коляда. – К. : КНЕУ, 2011. – 297 с.
8. U.S. Securities and Exchange Commission. [online] Available at: <http://www.sec.gov/>.