УДК 519.863:330.115

Бойчук М.В.
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри економіко-математичного моделювання
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича

Вінничук О.Ю.
кандидат економічних наук,
доцент кафедри економіко-математичного моделювання
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича

СТОХАСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ОДНОПРОДУКТОВОЇ МАКРОЕКОНОМІКИ ЗРОСТАННЯ З ЕНДОГЕННИМ НАУКОВО-ТЕХНІЧНИМ ПРОГРЕСОМ

STOCHASTIC MODELING AND OPTIMIZATION OF SINGLE-COMPONENT MACROECONOMICS GROWTH WITH ENDOGENOUS TECHNOLOGICAL PROGRESS

АНОТАЦІЯ

У статті запропоновано стохастичну модель однопродуктової макроекономіки зростання з ендогенним науково-технічним прогресом та використанням вінерівських і пуассонівських процесів. У стохастичній економіко-математичній моделі враховано, що кінцевий випуск продукції використовується на споживання, капіталовкладення в розширення основних фондів, покращання виробництва з урахуванням ефективності затрат «на науку», оподаткування, урядові витрати, сальдо та на ліквідацію забруднення навколишнього середовища. Ця стохастична модель ураховує вплив наукових досліджень на виробництво у самій системі, тобто цей вплив є ендогенною змінною. Побудовано алгоритм розрахунку оптимального процесу за необхідного вибору економічного режиму серед крайових режимів на початковій стадії протікання економічного процесу, а також алгоритм розрахунку оптимального процесу за пріоритетного вибору економічного режиму серед магістральних режимів на початковій стадії. Крім того, за заданою ймовірністю наведені довірчі проміжки для реальних значень оптимальних траєкторій.

Ключові слова: стохастична модель, ендогенний науково-технічний прогрес, оптимальне керування, оптимальний процес, крайовий процес, магістральний процес, момент перемикання керування.

АННОТАЦИЯ

В статье предложена стохастическая модель однопродуктовой макроэкономики роста с эндогенным научно-техническим прогрессом и использованием винеровских и пуассоновских процессов. В стохастической экономико-математической модели учтено, что конечный выпуск продукции используется на потребление, капиталовложения в расширение основных фондов, улучшение производства с учетом эффективности затрат «на науку», налогообложения, правительственных расходов, сальдо и на ликвидацию загрязнения окружающей среды. Эта стохастическая модель учитывает влияние научных исследований на производство в самой системе, то есть это влияние является эндогенной переменной. Построен алгоритм расчета оптимального процесса при необходимом выборе экономичного режима среди краевых режимов начальной стадии протекания экономического процесса, а также алгоритм расчета оптимального процесса при приоритетном выборе экономичного режима среди магистральных режимов начальной стадии.

Ключевые слова: стохастическая модель, эндогенный научно-технический прогресс, оптимальное управление, оптимальный процесс, краевой процесс, магистральный процесс, момент переключения управления.

ANNOTATION

The stochastic model of one-product macroeconomic growth with endogenous technological progress using Wiener and Poisson processes was proposed. The stochastic mathematical model takes into account that the final output is used for consumption, investment in fixed assets, improving production efficiency taking into account costs "for science", taxation, government spending, balance and the cleanup of pollution. This stochastic model takes into account the impact of research on the system production itself and this influence is an endogenous variable. The algorithm for calculating the optimal process under the required choice of the economic regime among boundary regimes in the initial stage of the flow of economic process and algorithm for calculating the optimal process in the prioritization of economic mode among magistral modes in the initial stage were developed. In addition, confidence intervals for real values of optimal trajectories are given.

Keywords: stochastic model, endogenous technological progress, optimal control, optimal process edge process, the main process, switching control point.

Постановка проблеми. Неврахування деяких економічних показників у математичних моделях, невизначеність і неточність у параметрах моделі, початкових даних та інших причин приводять до розгляду стохастичного моделювання. З іншого боку, вплив науково-технічного прогресу на характер зростання в економічній системі виявляється в різних формах, зокрема під час дослідження неавтономних, тобто змінних у часі, макровиробничих функцій.

У цій статті розглядається стохастична економіко-математична модель, де вплив наукових досліджень на виробництво запрограмований у самій стохастичній системі, тобто в стохастичній моделі з внутрішнім (ендогенним) урахуванням науково-технічного прогресу.

Тому актуальним, як у теоретичному, так і в практичному плані, є вплив наукових досліджень на виробництво в самій ендогенній стохастичній системі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботі [1, с. 262–267] запропонована детермінована модель однопродуктової економіки зростання з ендогенним урахуванням науково-технічного прогресу та проведено її дослідження з використанням принципу Понтрягіна (необхідних умов оптимальності). Проте в ній відсутнє споживання. А в роботі [2] проведено дослідження за допомогою достатніх умов оптимальності.

Мета статті полягає у запропонуванні стохастичної моделі однопродуктової макроекономіки зростання з ендогенним науково-технічним прогресом із використанням вінерівських і пуассонівських процесів та проведенні її дослідження.

Виклад основного матеріалу дослідження. У роботі О.І. Пономаренко [2] наведена детермінована модель однопродуктової макроекономіки зростання з ендогенним технічним прогресом та з урахуванням споживання в питомих показниках:

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = -(\mu+n)k(t) + (1-a)(1-b)L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)n(t-t_0)} \times \\ \quad \times u(t)A(Q)f(k), \\ Q(t) = L_o q(t)e^{n(t-t_0)}, \\ \dot{q}(t) = -nq(t) + (1-a)(1-b)\left[1-s(t)\right]\left[1-u(t)\right]L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)n(t-t_0)} \times \\ \quad \times A(Q)f(k),\ t \ge t_0, \\ k(t_0) = k_0,\ q(t_0) = q_0, \\ 0 \le u(t) \le 1,\ k(T) \ge k_T, \end{cases} \quad (1)$$

де $k = \dfrac{K}{L}$ – фондомісткість (питомий капітал), K капітал, $L(t) = L_0 e^{n(t-t_0)}$ – динаміка руху трудових ресурсів (робочої сили), $t \ge t_0$ – час, t_0 – початковий стан відліку часу; L_0 – початковий стан робочої сили, $\mu \in (0;1)$ – норма амортизації; n – темп зростання робочої сили; $a \in (0;1)$ – коефіцієнт пропорційності кінцевого випуску продукції Y до валової (проміжної) продукції X, $b \in (0;1)$ – коефіцієнт пропорційності сумарних урядових витрат, оподаткування, ліквідації об'єму забруднення та сальдо (експорт мінус імпорт) до частини кінцевого випуску продукції Y [3, с. 27–29]; $s \in (0;1)$ – кусково-диференційована функція часу t на $t \ge t$ (норма споживання); $\nu \in (0;2)$ – степінь однорідності макроекономічної функції $F(K,L)$: $F(K,L) = L^\nu F(K/L,1) \equiv L^\nu f(k)$ [3, с. 6–7]; $f(k \ge 0) \ge 0$ – питома макровиробнича функція з властивостями: двічі неперервно-диференційована, монотонно зростаюча $f'(k>0)=df/dk>0$, увігнута $f''(k>0) \equiv d^2f/dk^2 < 0$ та $f(0)=0$; $u \in [0;1]$ – коефіцієнт пропорційності інвестицій на нагромадження капіталу I_{ac} до частини кінцевої продукції $(1-b)Y$ із змінним у часі t; $A(Q \ge 0) > 0$ – мультиплікатор науково-технічного прогресу, величина якого свідчить про ефективність затрат «на науку» та задовольняє умови: двічі неперервно-диференційована, монотонно зростаюча $A'(Q>0)>0$, увігнута $A''(Q>0)<0$, $\lim_{Q \to 0} A'(Q) = \infty$ та $\lim_{Q \to \infty} A'(Q) = 0$; $q = Q/L$ – питомий об'єм інвестицій в науково-технічний прогрес; $k_0 = K_0/L_0$ – початковий стан питомого капіталу в науково-технічний прогрес, k_T – кінцевий стан питомого капіталу.

Динаміка руху капіталу описується диференціальною моделлю:

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = -\mu K(t) + I_{ac}(t),\ t \ge t_0, \\ I_{ac}(t) = (1-a)(1-b)u(t)F(K(t),L(t)), \\ C(t) = s(t)\left[1-u(t)\right](1-a)(1-b)F(K(t),L(t)), \end{cases}$$

де $C(t)$ – невиробниче споживання (споживання),

а динаміка руху об'єму інвестицій в науково-технічний прогрес:

$$\begin{cases} \dot{Q}(t) = I_s(t),\ t \ge t_0, \\ I_s(t) = (1-a)(1-b)\left[1-u(t)\right]\left[1-s(t)\right]A(Q)F(K(t),L(t)). \end{cases}$$

Задача в детермінованій моделі полягає у виборі керування $u(t)$, $0 \le u(t) \le 1$ в системі (1) так, щоб виходячи з положення (k_0, q_0) при $t = t_0$, вона досягла заданого рівня k_T питомого об'єму капіталу за найменший час T.

У роботі [4] економічно обґрунтовано, що під час стохастичного моделювання правомірно в праві частини динаміки руху економічних показників включати комбінацію вінерівських та пуассонівських процесів [5, с. 7–8], тому використаємо цей факт для стохастичного моделювання однопродуктової макроекономіки зростання з ендогенним науково-технічним прогресом з урахуванням споживання та формалізуємо її з детермінованої моделі (1).

Стохастична економіко-математична модель. Нехай $\{\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P}\}$ – ймовірнісний простір із σ-алгеброю $\mathrm{F} = \{\mathrm{F}_t, t \ge t_0\} \subset \sigma$, множиною елементарних подій Ω та мірою (ймовірністю) P; $\xi_i(t) \equiv \xi_i(t,\omega)$ ($\xi_i(t) \in \mathbb{R}$ – множина дійсних чисел, $i = 1,2$) є F_t $(t \ge t_0)$-вимірний стандартний вінерівський процес із нульовим математичним сподіванням $M\xi_i(t) = 0$ і одиничною дисперсією $M\xi_i^2(t) = 1$, $\omega \in \Omega$; $\eta_i(t) \equiv \eta_i(t,\omega)$ $(\eta_i(t) \in \mathbb{R})$ – F_t-вимірний пуассонівський процес із математичним сподіванням $M\eta_i(t) = \lambda_i(t-t_0)$, $\lambda_i \equiv const_i$, $\omega \in \Omega$, причому вектори $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ та $(\eta_1(t), \eta_2(t))$ є незалежними випадковими процесами.

Нехай на ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P}\}$ задані випадкові процеси питомого капіталу $k(t) \equiv k(t,\omega)$ і питомого об'єму інвестицій у науково-технічний прогрес $q(t) \equiv q(t,\omega)$, $t \ge t_0$, $\omega \in \Omega$, та які:

– задовольняють рівняння динамік у формі Іто [5, с. 159, с. 163; 6, с. 258]

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = -(\mu+n)k(t) + (1-a)(1-b)L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)n(t-t_0)}A(Q(t))f(k(t))u(t) + \\ \quad + \alpha_1\dot{\xi}_1(t) + \beta_1\dot{\eta}_1(t), \\ \dot{q}(t) = -nq(t) + (1-a)(1-b)L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)n(t-t_0)}\left[1-s(t)\right]\left[1-u(t)\right] \times \\ \quad \times A(Q(t))f(k(t)) + \alpha_2\dot{\xi}_2(t) + \beta_2\dot{\eta}_2(t), \\ Q(t) = L_0 q(t)e^{n(t-t_0)},\ t \ge t_0; \end{cases} \quad (1)$$

– задовольняють початковим умовам

$$k(t_0) = k_0,\ q(t_0) = q_0,\ \ k_0, q_0 \in \mathrm{F}_{t_0}; \quad (2)$$

– за питомим капіталом задовольняється обмеження

$$k(T) = k_T, \qquad (3)$$

за нефіксованого (шуканого) часу T.

Похідні від вінерівських процесів $\dot{\xi}_i(t)$ та пуассонівських процесів $\dot{\eta}_i(t)$, $i=\overline{1,2}$ слід розуміти як узагальнені, тобто похідні від функціоналів [7, с. 202–208].

На норму накопичення капіталу u накладаються обмеження:

$$0 \le u(t) \le 1, \quad t \ge t_0. \qquad (4)$$

Задача в стохастичному варіанті полягає у виборі керування $u(t)$ в системі (1) так, щоб виходячи з положення (k_0, q_0) у момент часу $t = t_0$, система (1) досягла заданого рівня питомого об'єму капіталу k_T за найменший час $T > t_0$, тобто необхідно мінімізувати перший момент попадання точкою (k,q) в множину $D_\varepsilon = \{(k,q) \in \square^2 \mid q \ge 0,\ k_T - \varepsilon \le k \le k_T + \varepsilon\}$:

$$T_{u^*}(k,q) = \min_u T_u(k,q) \qquad (5)$$

під час виконання обмежень (1)-(4).

Задача (1)–(4) є задачею стохастичної оптимальної швидкодії (задачею стохастичного оптимального керування із закріпленим лівим та вільним правим моментами часу і закріпленими лівим та вільним правим кінцями траєкторій), в якій керуванням виступає норма накопичення капіталу u та фазовими траєкторіями за питомим капіталом k і питомим об'ємом інвестицій у науково-технічний прогрес q.

Проведемо дослідження стохастичної економіко-математичної моделі (1)–(5) за допомогою стохастичних достатніх умов оптимальності [8, с. 117–119, 158, 162–163].

Дослідження стохастичної економіко-математичної моделі. Спершу визначимо керування за нормою нагромадження капіталу.

Керування. За стохастичними достатніми умовами оптимальності запишемо рівняння Беллмана з крайовою умовою

$$\begin{cases} \inf\limits_u R(t,k,q,u,V) \equiv \inf\limits_u \Big\{ \partial V/\partial t + \partial V/\partial k \big[-(\mu+n)k + (1-a)(1-b)L_0^{\nu-1} \times \\ \times A(Q) f(k) e^{(\nu-1)n(t-t_0)} u \big] + \partial V/\partial q \big[-nq + (1-a)(1-b)L_0^{\nu-1} A(Q) \times \\ \times (1-s)(1-u) f(k) e^{(\nu-1)n(t-t_0)} u \big] + \frac{1}{2}\alpha_1^2 \partial^2 V/\partial k^2 + \frac{1}{2}\alpha_2^2 \partial^2 V/\partial q^2 + \\ + \lambda_1 \big[V(t,k+\beta_1,q) - V(t,k,q) \big] + \lambda_2 \big[V(t,k,q+\beta_2) - V(t,k,q) \big] + 1 \Big\} = 0, \\ Q(t) = L_0 e^{n(t-t_0)} q(t), \quad t \ge t_0, \quad V(T,k_T,q(T)) = 0, \\ 0 \le u(t) \le 1, \quad t \ge t_0, \end{cases} \qquad (6)$$

де $V(t,k,q)$ – шукана неперервна-диференційована функція один раз по t та двічі – по k і q. Невідому функцію V будемо шукати у вигляд:

$$V(t,k,q) = k^2 + q^2 + l(k+q) - \left[k_T^2 + q^2(T) + l\left(k_T + q(T)\right) \right], \qquad (7)$$

де стала l підлягає визначенню (вибору).

Підставимо (7) у рівняння Беллмана (6). Функція R лінійна за u, а тому найменшого значення по u на відрізку [0,1] одержує

$$u_{край}(t) = \begin{cases} 1,\ \psi(t,k,q) < 0, \\ \text{довільне з} \\ 0,\ \psi(t,k,q) > 0, \\ \text{äî â³ëüí å ç}\ [0,1],\ \psi(t,k,q) = 0, \end{cases} \qquad t \ge t_0. \quad (8)$$

Функція $\psi(t,k,q) = \partial V/\partial k - (1-s)\partial V/\partial q = 2k - 2sq + ls$, причому $\partial V/\partial k = 2k + l$ характеризує норму ефективності нагромадження капіталу, а $(1-s)\partial V/\partial q = (1-s)(2q+l)$ – норму ефективності капіталовкладень у науку.

Розглянемо особливий випадок

$$\psi(t,k,q) = 2k - 2s(t)q + ls(t) = 0, \quad t \ge t_0. \qquad (9)$$

Зауважимо, що у фазовій площині kOq особлива крива (t,k,q) 0 є прямою лінією. Під особливою прямою за (8) керування $u_{\text{край}}$=1, а над – $u_{\text{край}}$=0.

Запишемо рівняння Беллмана (6):

$$\begin{cases} -(\mu+n)(2k+l)k + (2q+l)\big\{ -nq + (1-a)(1-b)L_0^{\nu-1} A(Q)\left[1 - s(t)\right] \times \\ \times f(k) e^{(\nu-1)n(t-t_0)} \big\} + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_1 l \beta_1 + \alpha_2 l \beta_2 + 1 = 0, \\ Q(t) = L_0 e^{n(t-t_0)} q(t), \ t \ge t_0. \end{cases} \qquad (10)$$

Отримали систему нелінійних алгебраїчних рівнянь (9)–(10) для визначення оптимізаційних величин $\tilde{q}(t)$ і $\tilde{q}(t)$, $t \ge t_0$ та які можна знайти одним із числових методів [6, с. 48–51; 9]. Причому $\tilde{k}(t)$ і $\tilde{q}(t)$ – кусково-диференційовані функції на $t \ge t_0$.

Із використанням властивостей вінерівських і пуассонівських процесів

$$M\dot{\xi}_i(t) = \left(M\xi_i(t)\right)^{\square} = 0,$$

$$M\dot{\eta}_i(t) = \left(M\eta_i(t)\right)^{\square} = \left(\lambda_i(t-t_0)\right)^{\square} = \lambda_i, \ i = 1,2$$

для системи (1) рівнянь стохастичних динамік руху питомого капіталу k та питомого об'єму інвестицій у науково-технічний прогрес q запишемо (формально) систему рівнянь середніх динамік

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = -(\mu+n)k(t) + (1-a)(1-b)L_0^{\nu-1} u(t) A(Q) f(k) e^{(\nu-1)n(t-t_0)} + \lambda_1\beta_1, \\ \dot{q}(t) = -nq(t) + (1-a)(1-b)L_0^{\nu-1}\left[1-s(t)\right]\left[1-u(t)\right] \times \\ \qquad \times A(Q) f(k) e^{(\nu-1)n(t-t_0)} + \lambda_2\beta_2, \\ Q(t) = L_0 e^{n(t-t_0)} q(t), t \ge t_0. \end{cases} \qquad (11)$$

За визначеними кусково-диференційованими на $t \ge t_0$ оптимізаційними величинами $\tilde{k}(t)$ і $\tilde{q}(t)$ із системи рівнянь середніх динамік (11) знайдемо кусково-неперервні на $t \ge t_0$ магістральні керування за нормою нагромадження капіталу:

– із рівняння середньої динаміки питомого капіталу

$$\begin{cases} u_{\text{маг}}^{(1,l)}(t) = \left[\dot{\tilde{k}}(t) + (\mu+n)\tilde{k}(t) - \lambda_1\beta_1 \right] (1-a)^{-1}(1-b) \times \\ \qquad \times L_0^{\nu-1} A^{-1}(\tilde{Q}) f(\tilde{k}) e^{(1-\nu)n(t-t_0)}, \\ \tilde{Q}(t) = L_0 e^{(1-\nu)n(t-t_0)} \tilde{q}(t), \ t \ge t_0, \end{cases} \qquad (12)$$

– із рівняння середньої динаміки питомого об'єму інвестицій у науково-технічний прогрес

$$\begin{cases} u_{\text{маг}}^{(2,l)}(t) = 1 - \left[\dot{\tilde{q}}(t) + n\tilde{q}(t) - \lambda_2\beta_2 \right] (1-a)^{-1}(1-b)^{-1} \times \\ \qquad \times L_0^{\nu-1}\left[1-s(t)\right]^{-1} A^{-1}(\tilde{Q}) f^{-1}(\tilde{k}) e^{(1-\nu)n(t-t_0)}, \\ \tilde{Q}(t) = L_0 e^{(1-\nu)n(t-t_0)} \tilde{q}(t), \ t \ge t_0. \end{cases} \qquad (13)$$

Вибором сталої l можна домогтися того, щоб магістральні керування за нормою нагромадження капіталу $u_{маг}^{(1,l)} \in [0,1]$ і $u_{маг}^{(2,l)} \in [0,1]$.

Таким чином, отримали два крайові керування $u^{(1)}_{край}=1$ та $u^{(2)}_{маг}=0$ і два кусково-неперервні на $t \ge t_0$ магістральні керування $u^{(1,l)}_{маг}$ та $u^{(2,l)}_{маг}$.

Крайові та магістральні траєкторії. Відповідні стохастичні крайові $k_{край}(t)$ та $q_{край}(t)$ і магістральні $k_{маг}(t)$ та $q_{маг}(t)$, $t \ge t_0$ траєкторії визначаються за відповідними крайовими і магістральними керуваннями одним із числових методів [6, с. 258–276; 10] із відповідних початкових задач (1). Причому ці стохастичні початкові задачі мають єдиний розв'язок у сенсі стохастичної еквівалентності [6, с. 258; 5, с. 154–155; 10]. А середні крайові та магістральні траєкторії знаходяться як $k^{(i,c)}_{край}(t)=Mk^{(i)}_{край}(t)$, $k^{(i,c)}_{маг}(t)=Mk^{(i)}_{маг}(t)$, $t \ge t_0$, $i=1,2$.

Таким чином, одержали два стохастичні та середні крайові процеси $\Pi^{(1)}_{край}=\left\{k^{(1)}_{край}(t),\ q^{(1)}_{край}(t),\ u^{(1)}_{край}(t)=1,\ t \ge t_0\right\}$ та $\Pi^{(2)}_{край}=\left\{k^{(2)}_{край}(t),\ q^{(2)}_{край}(t),\ u^{(2)}_{край}(t)=0,\ t \ge t_0\right\}$ і два стохастичні та середні магістральні процеси, тобто чотири економічних режими для вибору необхідного (або пріоритетного).

Опишемо алгоритми розрахунку оптимального процесу під час вибору економічного режиму залежно від розміщення початкового стану (k_0,q_0) у фазовій площині відносно особливої прямої $\psi(t,k,q)=0$.

Алгоритм розрахунку оптимального процесу при виборі економічного режиму на початковій стадії протікання економічного процесу.

1. Виберемо необхідний крайовий режим (відповідно, процес) $\left\{k_{край}(t), q_{край}(t), u_{край}(t), t \ge t_0\right\}$ залежно від розміщення початкового стану (k_0,q_0) у фазовій площині kOq відносно особливої прямої $\psi(t,k,q)=0$:
   – за $\psi(t,k,q)<0$ крайове керування $u_{край}(t)=1,\ t \ge t_0$;
   – за $\psi(t,k,q)>0$ крайове керування $u_{край}(t)=0,\ t \ge t_0$.

2. Для вибраного крайового процесу під час керування $u_{край}(t)$ економічна система буде рухатися по крайовим (стохастичним і середнім) траєкторіям $k_{край}(t)$ і $q_{край}(t)$ до виходу на особливу пряму $\psi(t,k_{край},q_{край})=0$, тобто до моменту перемикання керування ζ_1.

3. Момент перемикання ζ_1 визначається як перший момент попадання на особливу пряму (магістраль) $\psi(t,k_{край}(t),q_{край}(t))=0$: $2k_{край}(t)-2s(t)q_{край}(t)+ls(t)=0,\quad t \ge t_0$. Найменший розв'язок цього рівняння ζ_1 можна обчислити одним із числових методів [6, с. 26–40; 11, с. 17–75; 9]. Таким чином, економічна система буде рухатися до моменту перемикання ζ_1.

4. За знайденим моментом ζ_1 виберемо магістральний режим (відповідно, процес) $\Pi_{маг}=\left\{k_{маг}(t), q_{маг}(t), u_{маг}(t), t \ge \zeta_1\right\}$, де стохастичні магістральні траєкторії $k_{маг}(t)$ і $q_{маг}(t)$ визначаються з рівнянь стохастичних динамік руху питомого капіталу та питомого об'єму інвестицій у науково-технічний прогрес системи (1) за вибраного магістрального керування $u=u_{маг}$ та стохастичних початкових умовах $k(\zeta_1)=k_{край}(\zeta_1)$ $q(\zeta_1)=q_{край}(\zeta_1)$. А середні магістральні траєкторії знаходяться як $k^{(c)}_{маг}(t)=Mk_{маг}(t)$ і $q^{(c)}_{маг}(t)=Mq_{маг}(t)$, $t \ge \zeta_1$. Тоді економічна система за $t \ge \zeta_1$ рухається по (стохастичних і середніх) магістральних траєкторіях $k_{маг}(t)$ і $q_{маг}(t),\ t \ge \zeta_1$, тобто у фазовій площині kOq рухається по особливій прямій (магістралі) $\psi(t,k,q)=0$.

5. У момент ζ_2 економічна система сходить з особливої прямої $\psi(t,k,q)=0$ і рухається по новим крайовим траєкторіям $k^{(н)}_{край}(t)$ та $q^{(н)}_{край}(t)$, $t \ge \zeta_2$ нового крайового режиму (відповідно, процесу) $\Pi^{(н)}_{край}=\left\{k^{(н)}_{край}(t), q^{(н)}_{край}(t),\ u^{(н)}_{край}(t)=1,\ t \ge \zeta_2\right\}$ при крайовому керуванні $u^{(н)}_{край}=1$. Момент ζ_2 є моментом перемикання керування та визначається із особливої прямої $\psi(t,k_{маг}(t),q_{маг}(t))=0$, $t \ge \zeta_1$, тобто є найбільшим розв'язком нелінійного алгебраїчного рівняння $2k_{маг}(t)-2s(t)q_{маг}(t)+ls(t)=0,\ t \ge \zeta_1$. Зазначимо, що в цьому рівнянні найменший і найбільший розв'язок ζ_1 і ζ_2 можуть співпадати (збігатися), тобто $\zeta_2=\zeta_1$. Нові стохастичні крайові траєкторії $k^{(н)}_{край}(t)$ та $q^{(н)}_{край}(t),\ t \ge \zeta_2$, визначаються із рівнянь стохастичних динамік руху питомого капіталу та питомого об'єму інвестицій у науково-технічний прогрес системи (1) за крайового керування $u=1$ та стохастичних початкових умов $k(\zeta_2)=k_{маг}(\zeta_2)$ і $q(\zeta_2)=q_{маг}(\zeta_2)$.

6. Із моменту ζ_2 економічна система рухається по крайових траєкторіях $k^{(н)}_{край}(t)$ і $q^{(н)}_{край}(t)$ до моменту T (кінця протікання економічного процесу), який є розв'язком нелінійного алгебраїчного рівняння $k^{(н)}_{край}(T)=k_T$ та який можна знайти одним із числових методів [6, с. 26–40; 11, с. 17–75; 9].

7. Тоді стохастичним і середнім оптимальним процесом $\Pi_{оп}=\left\{k_{оп}(t), q_{оп}(t), t \in [t_0,T]\right\}$, згідно з результатами [8], є склейка в момент перемикання керувань ζ_1 вибраних крайового процесу $\Pi_{край}=\left\{k_{край}(t), q_{край}(t), u_{край}(t),\ t \in [t_0,\zeta_1]\right\}$ і магістрального процесу $\Pi_{маг}=\left\{k_{маг}(t),\ q_{маг}(t),\ u_{маг}(t),\ t \in [\zeta_1,\zeta_2]\right\}$ та склейка в момент перемикання керування ζ_2 цього магістрального процесу і нового крайового процесу $\Pi^{(н)}_{край}=\left\{k^{(н)}_{край}(t), q^{(н)}_{край}(t), u^{(н)}_{край}(t)=1,\ t \in [\zeta_2,T]\right\}$, тобто

$$k_{оп}(t)=\begin{cases} k_{край}(t),\ t \in [t_0,\zeta_1], \\ k_{маг}(t),\ t \in [\zeta_1,\zeta_2], \\ k^{(н)}_{край}(t),\ t \in [\zeta_2,T], \end{cases} \quad q_{оп}(t)=\begin{cases} q_{край}(t),\ t \in [t_0,\zeta_1], \\ q_{маг}(t),\ t \in [\zeta_1,\zeta_2], \\ q^{(н)}_{край}(t),\ t \in [\zeta_2,T], \end{cases}$$

$$u_{оп}(t)=\begin{cases} u_{край}(t),\ t \in [t_0,\zeta_1], \\ u_{маг}(t),\ t \in [\zeta_1,\zeta_2], \\ u^{(н)}_{край}(t)=1,\ t \in [\zeta_2,T], \end{cases} \quad t \in [t_0,T].$$

Причому оптимальне керування за нормою нагромадження капіталу $u_{оп}$ є кусково-неперервною функцією на $[t_0,T]$, а оптимальні траєкторії за питомим капіталом $k_{маг}$ і за питомим об'ємом інвестицій у науково-технічний прогрес $q_{маг}$ є кусково-диференційованими функціями на $[t_0,T]$. Відзначимо, що оскільки є два магістральні режими (відповідно, процеси) і вибір може бути відбуватися по будь-якому з них, оптимальних процесів є два. Вихід із алгоритму.

Опишемо алгоритм розрахунку оптимального процесу, коли у фазовій площині kOq початковий стан (Mk_0, Mq_0) знаходиться на особливій прямій (магістралі) $\psi(t,k,q)=0$, тобто $\psi(t_0,Mk_0,Mq_0)=0$.

Алгоритм розрахунку оптимального процесу при виборі магістрального режиму на початковій стадії.

1. За виконання умови $\psi(t_0,Mk_0,Mq_0)=0$, що у фазовій площині середній початковий стан (Mk_0, Mq_0) належить особливій прямій $\psi(t,k,q)=0$, виберемо магістральний режим (відповідно, процес) $\Pi_{маг} = \left\{k_{маг}(t), q_{маг}(t), u_{маг}(t),\ t \ge t_0\right\}$ із двох магістральних режимів.

2. Економічна система рухається по (стохастичних і середніх) магістральних траєкторіях $k_{маг}(t)$ і $q_{маг}(t)$, $t \ge t_0$ до моменту перемикання керування ζ, що у фазовій площині kOq означає рух до моменту ζ сходження з особливої прямої $\psi(t,k,q)=0$, тобто ζ є найбільшим розв'язком нелінійного алгебраїчного рівняння $2k_{маг}(t) - 2s(t)q_{маг}(t) + ls(t) = 0,\ t \ge t_0$, та яке можна розв'язати одним із числових методів [6, с. 26–40; 11, с. 17–75; 9]. Відзначимо, що момент перемикання керування ζ може збігатися з моментом початку відліку t_0 тобто $\zeta = t_0$.

3. Із моменту ζ економічна система рухається по (стохастичних і середніх) нових крайових траєкторіях $k^{(н)}_{край}(t)$ і $q^{(н)}_{край}(t),\ t \ge \zeta$ нового крайового процесу $\Pi^{(н)}_{край} = \left\{k^{(н)}_{край}(t), q^{(н)}_{край}(t), u^{(н)}_{край}(t) = 1,\ t \ge \zeta\right\}$ за керування $u^{(н)}_{край}(t) = 1,\ t \ge \zeta$ до моменту (кінця дослідження протікання економічного процесу) T та який визначається одним із числових методів [6, с. 26–40; 11, с. 17–75; 9] із нелінійного алгебраїчного рівняння $k^{(н)}_{край}(T) = k_T$. Нові стохастичні крайові траєкторії $k^{(н)}_{край}(t)$ і $q^{(н)}_{край}(t)$ знаходяться з рівнянь стохастичних динамік руху питомого капіталу та питомого об'єму інвестицій у науково-технічний прогрес системи (1) за керування u=1 та стохастичних початкових умовах $k(\zeta) = k_{маг}(\zeta)$ і $q(\zeta) = q_{маг}(\zeta)$. Ця стохастична початкова задача має єдиний розв'язок $k^{(н)}_{край}(t)$ і $q^{(н)}_{край}(t)$ у сенсі стохастичної еквівалентності [6, с. 258; 5, с. 154–155; 12], оскільки норма споживання s є кусково-неперервною функцією на $t \ge t_0$, питома макровиробнича функція $f(k \ge 0) \ge 0$ – двічі неперервно-диференційована, монотонно зростаюча та вгнута, а мультиплікатор науково-технічного прогресу $A(Q \ge 0) > 0$ – двічі неперервно-диференційована, монотонно зростаюча та вгнута функція. Їх можна обчислити одним із числових методів [6, с. 258–276; 10]. А середні крайові траєкторії знаходяться як $k^{(c)}_{край}(t) = Mk_{край}(t)$ і $q^{(c)}_{край}(t) = Mq_{край}(t),\ t \ge t_0$.

4. Стохастичним і середнім оптимальним процесом $\Pi_{on} = \left\{k_{on}(t), q_{on}(t), u_{on}(t),\ t \in [t_0, T]\right\}$, згідно з результатами [8], є склейка у момент перемикання керування ζ стохастичних і середніх вибраного магістрального процесу $\Pi_{маг} = \left\{k_{маг}(t), q_{маг}(t),\right.$ маг $\left. u_{маг}(t),\ t \in [t_0, \zeta]\right\}$ та нового крайового процесу $\Pi^{(н)}_{край} = \left\{k^{(н)}_{край}(t), q^{(н)}_{край}(t), u^{(н)}_{край}(t) = 1,\ t \in [\zeta, T]\right\}$, тобто

$$k_{on}(t) = \begin{cases} k_{маг}(t),\ t \in [t_0, \zeta], \\ k^{(н)}_{край}(t),\ t \in [\zeta, T], \end{cases} \quad q_{on}(t) = \begin{cases} q_{маг}(t),\ t \in [t_0, \zeta], \\ q^{(н)}_{край}(t),\ t \in [\zeta, T], \end{cases}$$

$$u_{on}(t) = \begin{cases} u_{маг}(t),\ t \in [t_0, \zeta], \\ u^{(н)}_{край}(t) = 1,\ t \in [\zeta, T], \end{cases} \quad t \in [t_0, T].$$

Причому оптимальне керування за нормою нагромадження капіталу u_{on} є кусково-неперервною функцією на $[t_0,T]$, а оптимальні траєкторії за питомим капіталом k_{on} і за питомим об'ємом інвестицій у науково-технічний прогрес q_{on} є кусково-диференційованими функціями на $[t_0,T]$. Відзначимо, що за збігання моменту перемикання керування ζ до початкового часового відліку t_0 $(\zeta = t_0)$ нові крайові траєкторії $k^{(н)}_{край}(t)$ і $q^{(н)}_{край}(t)$ є оптимальними траєкторіями $k_{on}(t)$ і $q_{on}(t)$, $t \in [t_0,T]$. Оскільки є два магістральних процеси, а вибір можна здійснювати одного, то економіко-математична модель (1)–(5) має два оптимальні процеси. Отже, де б у фазовій площині kOq не знаходилась початкова точка середніх станів (Mk_0, Mq_0) – під, над чи лежала на особливій прямій, – економіко-математична модель (1)–(5) має два оптимальні процеси.

Вищеописане сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Нехай вхідна інформація економіко-математичної моделі (1)–(5) задовольняє умови:

1) детерміновані сталі: $\mu \in (0;1)$, $n > 0$, $a \in (0;1)$, $b \in (0;1)$, $\nu \in (0;2)$, α_1, β_1, α_2, β_2, $k_T > 0$, $\ge$, $T > t_0$, λ_1, λ_2; стохастичні сталі: k_0, q_0;

2) детермінована функція $s \in (0;1)$ – кусково-неперервна на $t \ge t_0$;

3) питома макровиробнича функція $f(k \ge 0) \ge 0$ – двічі неперервно-диференційована, монотонно зростаюча та вгнута;

4) мультиплікатор науково-технічного прогресу $A(Q \ge 0) > 0$ – двічі неперервно-диференційована, монотонно зростаюча та вгнута функція.

Тоді стохастична економіко-математична модель (1)–(5) має два як стохастичні, так і середні оптимальні процеси. Причому оптимальні керування за нормою нагромадження капіталу є кусково-неперервними функціями на $[t_0,T]$, а оптимальні траєкторії за питомим капіталом і за питомим об'ємом інвестицій у науково-технічний прогрес є кусково-диференційованими функціями на $[t_0,T]$.

Зауваження. Вище описана методика має місце для неперервних і кусково-лінійних питомої макровиробничої функції $f(k \ge 0) \ge 0$ та мультиплікатора науково-технічного прогресу $A(Q \ge 0) > 0$.

За стохастичного моделювання необхідно знати довірчі проміжки за заданою ймовірністю середніх значень і дисперсій нормальних генеральних сукупностей оптимальних траєкторій за питомим капіталом і за питомим об'ємом інвестицій у науково-технічний прогрес.

Нехай проведено обчислювальний експеримент по визначенню оптимальних траєкторій за питомим капіталом і за питомим об'ємом інвестицій у науково-технічний прогрес та отримано N ансамблів за питомим капіталом $k_{on}^{(i)}(t)$, $t \in [t_0, T]$, $i = \overline{1,N}$ та за питомим об'ємом інвестицій у науково-технічний прогрес $q_{on}^{(i)}(t)$, $t \in [t_0, T]$, $i = \overline{1,N}$. Обчислимо вибіркові статистики оптимальних траєкторій:

– середні вибіркові [13, с. 213]

$$\overline{k}_{on}(t) = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} k_{on}^{(i)}(t),\ t \in [t_0, T];$$

$$\overline{q}_{on}(t) = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} q_{on}^{(i)}(t),\ t \in [t_0, T];$$

– вибіркові дисперсії

$$s_{k_{on}}^2(t) = (N-1)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \left(k_{on}^{(i)}(t) - \overline{k}_{on}(t) \right)^2,$$

$$s_{q_{on}}^2(t) = (N-1)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \left(q_{on}^{(i)}(t) - \overline{q}_{on}(t) \right)^2,\ t \in [t_0, T].$$

Довірчими проміжками за заданою ймовірністю $\theta \in (0,1)$ для дисперсій оптимальних траєкторій є [13, с. 219]:

$$\left(\frac{(N-1) s_{k_{on}}^2(t)}{\chi_{1-\theta/2, N-1}^2}; \frac{(N-1) s_{k_{on}}^2(t)}{\chi_{\theta/2, N-1}^2} \right),$$

$$\left(\frac{(N-1) s_{q_{on}}^2(t)}{\chi_{1-\theta/2, N-1}^2}; \frac{(N-1) s_{q_{on}}^2(t)}{\chi_{\theta/2, N-1}^2} \right),\ t \in [t_0, T],$$

де $\chi_{\theta/2}^2(N-1)\left[\chi_{1-\theta/2}^2(N-1)\right] - \theta/2[1-\theta/2]$ – квантиль розподілу Пірсона χ^2 із $(N-1)$ ступенями вільності за заданого рівня довіри $\theta \in (0,1)$ [13, с. 238–239].

Тоді довірчими проміжками за заданою ймовірністю $\theta \in (0,1)$ для реальних значень оптимальних траєкторій за питомими капіталом $k_{on}^{(p)}(t)$ та об'ємом інвестицій у науково-технічний прогрес $q_{on}^{(p)}(t)$, $t \in [t_0, T]$ набувають вигляду [13, с. 219]:

$$k_{on}^{(p)}(t) \in \left(\overline{k}_{on}(t) - \frac{t_{\theta}^{(N-1)} s_{k_{on}}(t)}{\sqrt{N}}; \overline{k}_{on}(t) + \frac{t_{\theta}^{(N-1)} s_{k_{on}}(t)}{\sqrt{N}} \right),$$

$$q_{on}^{(p)}(t) \in \left(\overline{q}_{on}(t) - \frac{t_{\theta}^{(N-1)} s_{q_{on}}(t)}{\sqrt{N}}; \overline{q}_{on}(t) + \frac{t_{\theta}^{(N-1)} s_{q_{on}}(t)}{\sqrt{N}} \right),\ t \in [t_0, T],$$

де $t_{\theta}^{(N-1)}$ – двосторонній θ-квантиль розподілу Стюдента з $(N-1)$ ступенями вільності за заданого рівня довіри $\theta \in (0,1)$ [13, с. 238-239].

Висновки. Запропоновано та проведено дослідження стохастичної моделі однопродуктової макроекономіки зростання з ендогенним науково-технічним прогресом. Стохастична економіко-математична модель має два оптимальних процеси серед кусково-неперервних функцій по керуванню за нормою нагромадження капіталу та серед кусково-диференційованих функцій по питомому капіталу і по питомому об'єму інвестицій у науково-технічний прогрес.

Для запропонованої стохастичної економіко-математичної моделі встановлено, що оптимальне керування за нормою нагромадження капіталу і моменти перемикання керувань є детермінованими величинами, а оптимальні траєкторії за питомим капіталом і за питомим об'ємом інвестицій у науково-технічний прогрес – стохастичними. Крім того, проведено опис структури оптимальних процесів і наведено довірчі проміжки за заданою ймовірністю для реальних значень оптимальних траєкторій.

Запропонована методика дослідження моделі однопродуктової макроекономіки зростання з ендогенним технічним прогресом доповнює методи математичного моделювання, дає можливість підвищити адекватність планування норм ефективності нагромадження капіталу й обсягу інвестицій у науково-технічний прогрес та, відповідно, прийняття рішень для таких економічних процесів і систем.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Пономаренко О.І. Основи математичної економіки / О.І. Пономаренко, М.О. Перестюк, В.М. Бурим. – К. : Інформтехніка, 1995. – 320 с.
2. Бойчук М.В. Моделювання однопродуктової макроекономіки зростання з ендогенним технічним прогресом з урахуванням споживання / М.В. Бойчук, А.Р. Семчук // Вісник Чернівецького торговельно-економічного інституту. 2015. – Вип. ІІІ (59). Економічні науки. – С. 176–188.
3. Бойчук М.В. Моделювання та оптимізація повного циклу однопродуктової макроекономіки зростання з урахуванням екологічного фактора : монографія / М.В. Бойчук, А.Р. Семчук. – Чернівці : Місто, 2012. – 208 с.
4. Бойчук М.В. Стохастическая модель оптимальной однопродуктовой экономики роста при нелинейном эколого-экономическом критерии с винеровскими и пуассоновскими процессами / М.В. Бойчук, А.Р. Семчук // Проблемы управления и информатики, 2015. – № 3. – С. 136–148.
5. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів : [навч. посіб.] / А.В.Скороход – К. : Либідь, 1990. – 168 с.
6. Ясинський В.К. Основи обчислювальних методів / В.К. Ясинський. – Чернівці : Золоті литаври, 2005. – 396 с.
7. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогров, С.В. Фомин. – М. : Наука, 1968. – 496 с.
8. Андреева Е.А. Управление системами с последействием / Е.А. Андреева, В.Б. Колмановский, Л.Е. Шайхет. – М. : Наука, 1992. – 336 с.
9. Бейко И.В. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации / И.В. Бейко, Б.Е. Бублик, П.Н. Зинько. – К. : Вища школа, 1983. – 512 с.
10. Никитин Н.Н. Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешности / Н.Н. Никитин, В.Д. Разевич // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1978. – Т. 18. – № 1. – С. 106–117.
11. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М. : Наука, 1980. – 518 с.
12. Гихман И.И. Управляемые случайные процессы : научное издание / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – К. : Наук. думка, 1977. – 251 с.
13. Эконометрика. Начальный курс : [учебник] / Я.Р. Магнус, П.К. Катышев, А.А. Пересецкий ; 2-е изд., испр. – М. : Дело, 1998. – 248 с.